Prednáška 3

3.1. Teória stability

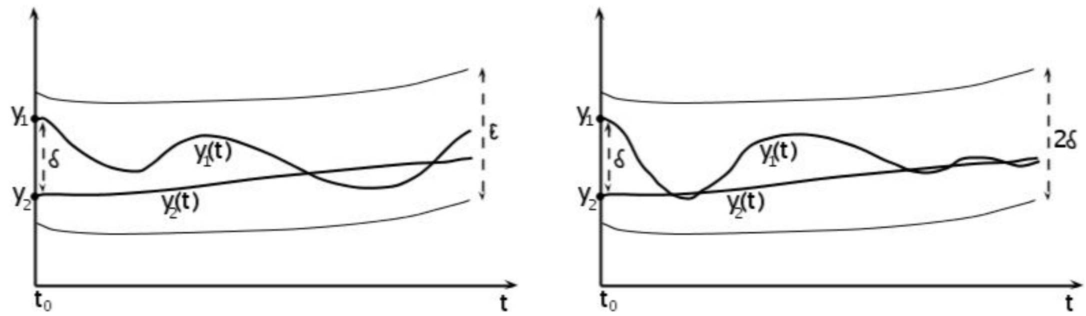
V inžinierskej praxi je nutné, aby rôzne systémy pracovali v stabilnom režime. V prípade poruchy potrebuje inžinier vedieť, či sa doň systém vráti. Ak systém nie je stabilný, môže byť jeho správanie sa dokonca nebezpečné (napr. mosty). Fyzikálny význam - stabilita (lineárneho, diferenciálneho) systému je jeho vlastnosť vyjadrujúca schopnosť sa navrátiť do rovnovážneho stavu po "odznení poruchy", ktorá ho z neho vyviedla. V tejto kapitole budeme teda vyšetrovať závislosť od začiatočných podmienok a parametrov. Majme systém (1.6), kde $\mathbf{f}$ je spojitá vektorová funkcia na množine $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, pričom (maximálne) riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ existuje na $[t_0, \infty)$ a označuje riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\psi(t_0, t_0, \xi) = \xi$.

Definícia 3.1.1.

Riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ rovnice (1.6) sa nazýva stabilné (v zmysle Ljapunova), ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_1 - \xi_2\| < \delta \Rightarrow \|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| < \varepsilon$ pre každé $t \geq t_0$. Ak platí

$$\lim_{t \to \infty} \|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = 0,$$

potom sa riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ nazýva pozitívny atraktor. Ak platia obe podmienky, hovoríme, že riešenie je asymptoticky stabilné. Riešenie sa nazýva nestabilné, ak nie je stabilné. Rovnica sa nazýva stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná), ak všetky jej riešenia sú stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).



(a) Stabilné riešenie v zmysle Ljapunova. (b) Asymptoticky stabilné riešenie.

Obr. 3.1: Stabilné riešenia v priestore trajektórií.

Poznámka 3.1.2.

Geometrický význam definície stability: riešenia, ktoré sú si $\delta-$"blízke" v začiatočnom momente, zostanú navzájom $\epsilon-$"blízke" aj pre všetky hodnoty $t \geq t_0$. Asymptoticky stabilné riešenie navyše konverguje k nejakému ekvilibriu.

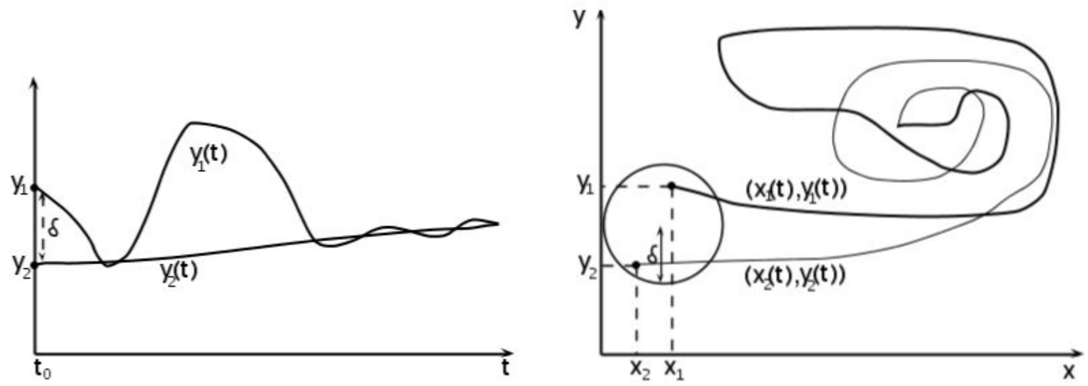
Problém 3.1.3.

Napíšte definíciu nestabilného riešenia.

Definícia 3.1.4.

Ak špeciálne $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| < K\,\mathrm{e}^{-b(t-t_0)},\ b, K > 0$, pre každé $t \geq t_0$, potom sa riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ nazýva exponenciálne stabilné.

Zrejme každé exponenciálne stabilné riešenie je asymptoticky stabilné, ktoré navyše konverguje aspoň tak rýchlo ako nejaká exponenciálne klesajúca funkcia.



(a) Atraktor v priestore trajektórií.

(b) Atraktor vo fázovom priestore.

Obr. 3.2: Pozitívny atraktor.

Príklad 3.1.5.

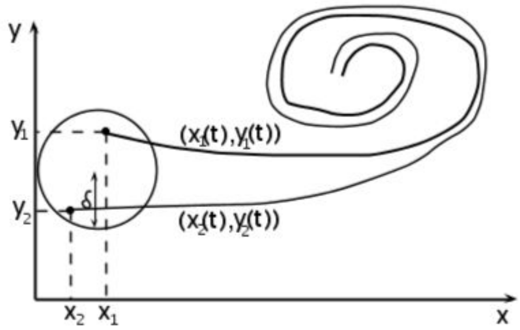
Pre diferenciálnu rovnicu $x' = k\,x$, $k \in \mathbb{R}$ je $\psi(t, t_0, \xi) = \xi\, \mathrm{e}^{k\,(t-t_0)}$. Zrejme nám hodnota k ovplyvní stabilitu riešenia.

- Ak $k = 0$, potom $\psi(t, t_0, \xi) = \xi$ a zrejme $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = \|\xi_1 - \xi_2\|$. Teda pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ stačí vziať $\delta = \varepsilon$ a vidíme, že rovnica je stabilná (zrejme žiadne riešenie nie je asymptoticky stabilné).
- Ak $k < 0$, potom pre každé $\varepsilon > 0$ a $0 < \delta < \varepsilon$ je $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = \mathrm{e}^{k\,(t-t_0)}\|\xi_1 - \xi_2\| < \varepsilon$. Naviac je $\lim\limits_{t\to\infty} \|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = 0$. Rovnica je teda asymptoticky stabilná.
- Ak $k > 0$, potom $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = \mathrm{e}^{k\,(t-t_0)}\|\xi_1 - \xi_2\| \to \infty$, ak $t \to \infty$. Rovnica je teda nestabilná.

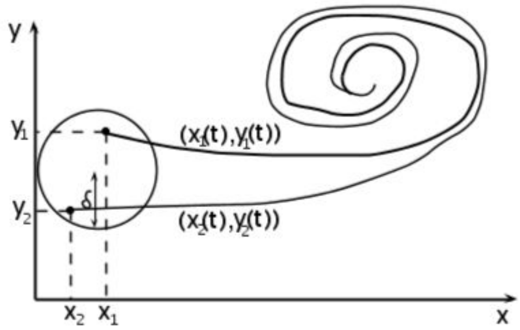
Poznámka 3.1.6.

V lineárnom prípade stačí namiesto skúmania stability partikulárneho riešenia skúmať stabilitu triviálneho riešenia transformovaného systému a teda stačí skúmať stabilitu homogénnych systémov.

Nasledujúce vety sa týkajú lineárneho systému s konštantnými koeficientami (2.4). Pre určenie stability či nestability nulového ekvilibria sú rozhodujúce vlastnosti koreňov charakteris-



(a) Stabilné riešenie v Ljapunovom zmysle.



(b) Asymptoticky stabilné riešenie.

Obr. 3.3: Stabilné riešenia vo fázovom priestore.

tickej rovnice $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

Veta 3.1.7 (Stabilita podľa charakteristických čísel)**.**

1. Ak je rovnica (2.4) stabilná, potom $\Re\mathfrak{e}\ (\lambda) \leq 0$ pre každé vlastné číslo matice $\mathbf{A}$.
2. Ak $\Re\mathfrak{e}\ (\lambda) \leq 0$ pre každé vlastné číslo matice $\mathbf{A}$, pričom ak $\Re\mathfrak{e}\ (\lambda) = 0$, tak Jordanov blok zodpovedajúci tomuto vlastnému číslu je jednoduchý, t.j. diagonálny (nemá jednotky nad diagonálou). Potom rovnica (2.4) je stabilná.
3. Rovnica (2.4) je asymptoticky stabilná $\Leftrightarrow$ ak $\Re\mathfrak{e}\ (\lambda) < 0$ pre každé vlastné číslo matice $\mathbf{A}$.
4. Ak existuje vlastné číslo λ matice $\mathbf{A}$ tak, že $\Re\mathfrak{e}\ (\lambda) > 0$, alebo vlastné číslo matice $\mathbf{A}$ s $\Re\mathfrak{e}\ (\lambda) = 0$ a nejednoduchým Jordanovým blokom, potom je rovnica (2.4) nestabilná.

Veta 3.1.8 (Nutná podmienka asymptotickej stability)**.**

Nech rovnica (2.4) je asymptoticky stabilná a jej charakteristická rovnica má tvar $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0 \quad (a_n = 1)$, potom $a_k > 0,\ k = 0, \ldots, n-1$.

Pri určovaní stability je teda nutné zistiť či majú všetky korene záporné reálne zložky. Je známe, že kladnosť všetkých koeficientov nie je postačujúcou podmienkou na to, aby všetky korene charakteristickej rovnice ležali naľavo od imaginárnej osi - táto podmienka je nutná i postačujúca iba pre rovnice prvého a druhého stupňa. Odpoveď na otázku ako je to vo všeobecnosti nám dáva nasledujúca veta.

Definícia 3.1.9.

Nech $a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \dots, n-1,\ a_n = 1$, polynóm $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k,\ n \geq 1$ sa nazýva Hurwitzov, ak všetky jeho korene majú zápornú reálnu časť. Matica $(H)_{ij} = a_{2i-j}$, kde $a_k = 0$ pre $k \notin \{0, 1, \dots, n\}$, sa nazýva Hurwitzova matica polynómu $P(\lambda)$. Ide o maticu typu $n \times n$, ktorá má tvar

$$\mathbf{H}_P(n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

kde $a_k = 0$ pre $k \notin \{0, 1, \dots, n\}$.

Nasledujúca veta nám dáva nutnú a postačujúcu podmienku asymptotickej stability.

Veta 3.1.10 (Routheove-Stodolove-Hurwitzove kritérium)**.**

Nech $a_k > 0,\ k = 0, \dots, n-1,\ a_n = 1$. Potom je polynóm $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k,\ n \geq 1$ Hurwitzov vtedy a len vtedy, ak jeho Hurwitzova matica má kladné všetky hlavné diagonálne minory.

Poznámka 3.1.11.

Pre hlavné minory matice platí $\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$. Navyše poslednú podmienku možno nahradiť podmienkou $a_n > 0$. Je vhodné, aby výpočty determinantov boli robené v tomto poradí: $\Delta_n,\ \Delta_1,\ \Delta_2$, atď.
Hurwitzova matice je rovnakého rádu ako stupeň polynómu a v prípade $n = 3$ má tvar

$$\mathbf{H}_P(3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Problém 3.1.12.

Skúmajte stabilitu nulového riešenia rovnice

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Príklad 3.1.13.

Zistíme, pre ktoré $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je systém

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + \alpha\, x_2 + \beta\, x_3, \\ x_2' &= -\alpha\, x_1 - x_2 + \alpha\, x_3, \\ x_3' &= -\beta\, x_1 - \alpha\, x_2 - x_3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

asymptoticky stabilný. Charakteristický polynóm systému (3.1) je

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (3 + 2\alpha^2 + \beta^2)\,\lambda + (1 + 2\alpha^2 + \beta^2).$$

Máme teda $a_0 = 1 + 2\alpha^2 + \beta^2,\ a_1 = 3 + 2\alpha^2 + \beta^2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 1$ a platí, že Hurwitzova matica má kladné všetky hlavné diagonálne minory pre všetky $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problém 3.1.14.

Určte, pre aké hodnoty parametrov p, q je systém

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_2' &= -x_1 - qx_2 - px_3, \end{aligned} \tag{3.2}$$

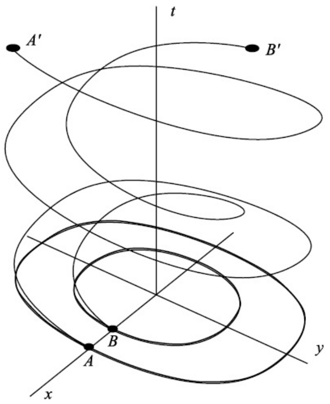
asymptoticky stabilný.

3.2. Klasifikácia ekvilibrií systémov 2×2

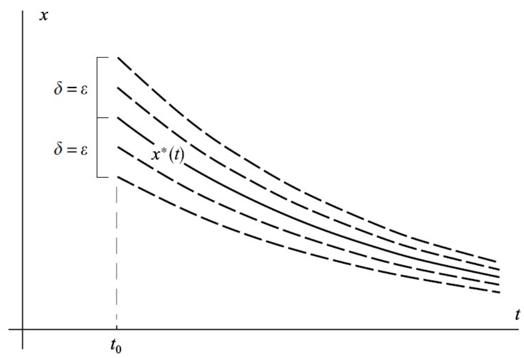
Pozrieme sa na klasifikáciu stacionárnych bodov systému

$$\begin{aligned} x' &= A\,x + B\,y, \\ y' &= C\,x + D\,y. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Podľa správania sa trajektórií v okolí stacionárnych bodov rozdeľujeme tieto stacionárne body do niekoľkých navzájom disjunktných skupín. Zjednodušene povedané, kedykoľvek sa medzi vlastnými hodnotami matice koeficientov pravej strany v stacionárnom bode objaví vlastná hodnota so zápornou reálnou časťou, existuje trajektória konvergujúca do tohto bodu. Ak má niektorá vlastná hodnota kladnú reálnu časť, existuje trajektória vychádzajúce z tohto bodu. Ak majú vlastné hodnoty nenulovú imaginárnu časť, dochádza v okolí stacionárneho bodu k osciláciám.



(a) Integrálne krivky prislúchajúce k stacionárnemu bodu typu centrum. Aj keď na začiatku sú blízko seba v bodoch A a B, časom sa od seba vzdialia (body A', B').

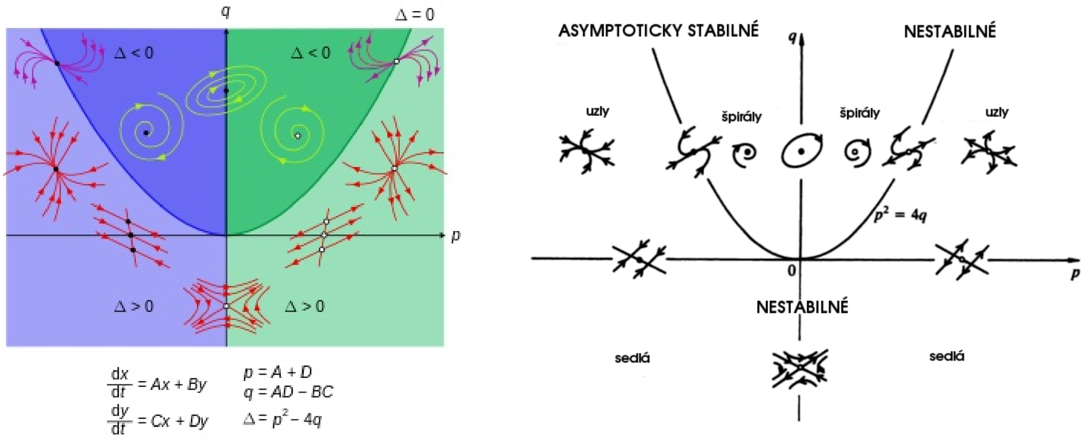


(b) Ljapunova stabilita riešenia $x^*(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)}$.

Obr. 3.4: Stabilita typických riešení.

Tabuľka 3.1: Klasifikácia ekvilibrií systému (3.3) pre nedegenerované prípady.

Diskriminant	Vlastné hodnoty	Kritický bod	Stabilita	Lokálny tok
$\Delta > 0$	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	uzol	AS	$\searrow$ v oboch súradniciach k x^*
$\Delta > 0$	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	uzol	N	$\nearrow$ v oboch súradniciach od x^*
$\Delta > 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	sedlo	N	v jednom smere $\nearrow$ a v druhom $\searrow$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, 2 vl. vektory	dikrit. uzol	N	$\nearrow$ v oboch súradniciach od x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, 2 vl. vektory	dikrit. uzol	AS	$\searrow$ v oboch súradniciach k x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, 1 vl. vektor	degen. uzol	N	$\nearrow$ v oboch súradniciach od x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, 1 vl. vektor	degen. uzol	AS	$\searrow$ v oboch súradniciach k x^*
$\Delta < 0$	$\mathfrak{Re}\,(\lambda_i) < 0,\ i = 1,2$	špirála	AS	má špirálový pohyb smerom k x^*
$\Delta < 0$	$\mathfrak{Re}\,(\lambda_i) > 0,\ i = 1,2$	špirála	N	má špirálový pohyb smerom od x^*
$\Delta < 0$	$\mathfrak{Re}\,(\lambda_i) = 0,\ i = 1,2$	centrum	S	rotuje okolo x^*



(a) (b)

Obr. 3.5: Klasifikácia ekvilibrií systému (3.3).

Poznámka 3.2.1.

Špirála sa niekedy nazýva aj fókus, alebo ohnisko. Centrum sa volá aj stred a degenerovaný uzol zasa nevlastný. Dikritický uzol sa v angličtine výstižnejšie nazýva star. Sedlový bod sa nazýva aj hyperbolický bod, čo je vzhľadom na grafické znázornenie výstižné.

3.3. Klasifikácia ekvilibrií nelineárnych autonómnych systémov

Teraz sa pozrime na autonómny diferenciálny systém, t.j. systém (1.6), ktorý však explicitne nezávisí na t. Uvažujme teda systém

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \tag{3.4}$$

Poznámka 3.3.1.

Každá integrálna krivka systému (3.4) je tangenciálna k smerovému poľu $\mathbf{f}$ v každom bode.

Definícia 3.3.2.

Nech $\mathbf{y}^0$ je singulárny (stacionárny) bod rovnice (3.4), t.j. $\mathbf{f}(\mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$. Tento bod sa nazýva stabilný (asymptoticky stabilný, nestabilný), ak riešenie $\psi(t, 0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0$ rovnice (3.4) je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).

Poznámka 3.3.3.

Ak $\mathbf{y}^0$ je singulárny bod rovnice (3.4), potom je vlastne jej konštantným riešením ak spĺňa počiatočnú podmienku. Takéto riešenie nazývame aj ekvilibrium.

Uvedieme si dve vety, ktoré na vyšetrenie stability využívajú linearizáciu v okolí singulárnych bodov.

Veta 3.3.4 (Ljapunovova o linearizácii)**.**

Nech $\mathbf{f} \in C^1(E)$, $\mathbf{y}_* \in E \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^n$ je singulárny bod rovnice (3.4). Ďalej nech všetky vlastné čísla príslušnej Jacobiho matice $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_*)$ majú záporné reálne časti, potom bod $\mathbf{y}_*$ je asymptoticky stabilný (takýto singulárny bod nazývame aj atraktor - opakom je repeler).

Definícia 3.3.5.

Singulárny bod $\mathbf{y}^0$ systému (3.4) nazveme hyperbolický, ak žiadna z vlastných hodnôt príslušnej Jacobiho matice $J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{y}^0\right)$ neleží na imaginárnej osi.
Singulárny bod $\mathbf{y}^0$ systému (3.4) nazveme nedegenerovaný, ak žiadna z vlastných hodnôt príslušnej Jacobiho matice $J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{y}^0\right)$ nie je nulová.

Veta 3.3.6.

(I) Nech systém (3.4) je analytický, Hamiltonov a dimenzie $n = 2$, potom každý nedegenerovaný singulárny bod tohto systému je buď centrum, alebo sedlový bod.

(II) Nech systém (3.4) je analytický, gradientný a dimenzie $n = 2$, potom každý nedegenerovaný singulárny bod tohto systému je buď uzol, alebo sedlový bod.

Poznámka 3.3.7.

Ak nedegenerovaný singulárny bod je sedlovým bodom (ostrým lokálnym maximom, ostrým lokálnym minimom) hamiltoniánu $H(x, y)$ tak je sedlovým bodom (centrom) daného Hamiltonovho systému. Navyše, ak nedegenerovaný singulárny bod je sedlovým bodom (ostrým lokálnym maximom, ostrým lokálnym minimom) potenciálu $U(x, y)$ tak je sedlovým bodom (nestabilným uzlom, stabilný uzlom) daného gradientného systému.

Veta 3.3.8 (Grobmanova-Hartmanova)**.**

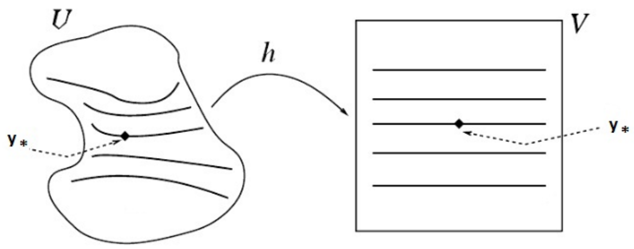
Nech $\mathbf{y}_*$ je hyperbolický singulárny bod systému (3.4). Nech $\mathbf{f} \in C^1(E)$, $\mathbf{y}_* \in E \subset \mathbb{R}^n$ a $U, V \subset \mathbb{R}^n$ sú také, že $\mathbf{y}_* \in U, V$, $t_* = 0 \in I$. Potom existuje homeomorfizmus $h : U \to V$ tak, že pre všetky začiatočné hodnoty $\mathbf{y}^0 \in U$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$, že pre všetky $\left(\mathbf{y}^0, t_0\right) \in U \times I$ platí

$$h(\psi(t, t_0, \mathbf{y}^0)) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} h(\mathbf{y}^0)$$

(systém (3.4) je lokálne topologicky ekvivalentný so svojou linearizáciou).

Poznámka 3.3.9.

Tento homeomorfizmus zobrazuje komponenty súvislosti prienikov trajektórií systému (3.4) s U na komponenty súvislosti prienikov trajektórií svojej linearizácie s V, pričom zachováva aj orientáciu trajektórií (zobrazuje trajektórie jedného systému blízko trajektórií druhého).



Obr. 3.6: Lokálna topologická ekvivalencia systému (3.4) a jeho linearizácie.

Nasledujúca veta nám umožňuje vyšetriť stabilitu aj v okolí bodov, ktoré nie sú hyperbolické. Nie vždy sa nám to však musí podariť, keďže to závisí od nájdenia istej funkcie. Základnou myšlienkou priamej Ljapunovej metódy je, že je možné posúdiť stabilitu pohybu sústavy aj bez znalosti celého priebehu jemu odpovedajúcej trajektórie . Ljapunova metóda je zovšeobecnením Lagrangeovho tvrdenia, že postačujúcou podmienkou stability rovnovážneho stavu x^* sústavy je, aby celková energia sústavy bola v tomto stave (odpovedá mu singulárny bod fázového priestoru) minimálna. Teda celková energia sústavy pri pohybe smerom k rovnovážnemu stavu sústavy klesá, ak je tento stav stabilný. Ljapunov vlastne zovšeobecnil uvedené tvrdenie.

Veta 3.3.10 (Ljapunovova)**.**

Nech $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ je okolie bodu $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ a existuje funkcia $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ taká, že platí:

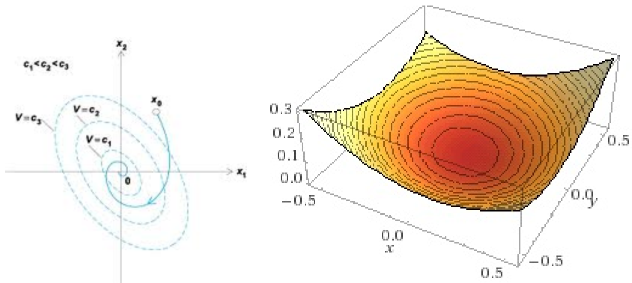
(I) $V(\mathbf{y}) \geq 0$ pre všetky $\mathbf{y} \in U$, pričom $V(\mathbf{y}) = 0, \mathbf{y} \in U \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$

(II) Existuje funkcia $W \in C(U, \mathbb{R})$ taká, že $W(\mathbf{y}) \geq 0$ pre všetky $\mathbf{y} \in U$, pričom $W(\mathbf{y}) = 0, \mathbf{y} \in U \Leftrightarrow \mathbf{y} = 0$ a

$$\dot{V} = \langle \nabla V(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{y})}{\partial y_i} f_i(\mathbf{y}) \leq -\beta\, W(\mathbf{y})$$

pre všetky $\mathbf{y} \in U$, kde $\beta \geq 0$. Potom, ak $\beta = 0$ ($\beta > 0$), tak triviálne riešenie rovnice (3.4) je stabilné (asymptoticky stabilné).

(III) Ak $\dot{V}$ je pozitívne definitná na U, potom je triviálne riešenie rovnice (3.4) nestabilné.



(a) (b)

Obr. 3.7: Typický tvar Ljapunovej funkcie.

Poznámka 3.3.11.

Vlastnosť (I) sa nazýva pozitívna definitnosť funkcie. Vlastnosť (II) hovorí o tom, že funkcia V je nerastúca pozdĺž trajektórií systému, t.j. jej derivácia (podľa t) je nekladná na nejakom okolí počiatku. Túto vetu je možné formulovať aj všeobecnejšie a to tak, že pravá strana systému (3.4) a funkcia V závisia explicitne aj od premennej t. Takýmto prípadmi sa však nebudeme zaoberať.

Geometrický význam (zo skalárneho súčinu) takto definovanej asymptotickej stability je, že fázové trajektórie musia v uvažovanom okolí počiatku pretínať plochy $V(\mathbf{y}) = C$ smerom od väčších hodnôt C k hodnotám menším (pre $t \to \infty$).

Poznámka 3.3.12.

Nevýhodou uvedenej metódy je, že nemáme návod ako túto funkciu nájsť. Pozor - nie je ani zaručené, že oblasť stavového priestoru, v ktorom platí uvedená podmienka stability reprezentuje celú skutočnú oblasť stability (voľba Ljapunovej funkcie nie je jednoznačná).

Príklad 3.3.13.

Uvažujme systém

$$x_1' = x_1\, x_2^4,$$
$$x_2' = -x_1^2\, x_2. \tag{3.5}$$

Funkcia $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ zrejme spĺňa prvú podmienku predchádzajúcej vety a $\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = -2x_1^2 x_2^4 \le 0$ pre všetky $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Teda bod $(0, 0)$ je stabilný.

Príklad 3.3.14.

Uvažujme systém

$$x_1' = -x_1^3 - x_2,$$
$$x_2' = x_1 - x_2^3. \tag{3.6}$$

Funkcia $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ zrejme spĺňa prvú podmienku predchádzajúcej vety a $\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = -2(x_1^4 + x_2^4)$. Ak definujeme $W(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ a $\beta = -2$, potom z druhej podmienky vety je singulárny bod $(0, 0)$ asymptoticky stabilný.

Pozrieme sa ešte na to, kedy máme zaručenú neexistenciu periodických trajektórií riešení (tzv. limitných cyklov).

Veta 3.3.15 (Dulacov test ($\rho = 1$ - Bendixson))**.**

Nech D je jednoducho súvislá oblasť fázového priestoru systému $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ a $\rho(x, y)$ je taká funkcia, že $\rho f, \rho g \in C^1$. Potom, ak $\operatorname{div}(\rho f, \rho g)$ nemení znamienko s.v. v D, tento systém nemá periodickú trajektóriu v D.

Príklad 3.3.16.

Majme systém $x' = y + x^3$, $y' = x + y + y^3$. Zrejme $\operatorname{div}(f, g) = 3x^2 + 1 + 3y^2 \ge 1 > 0$ na $\mathbb{R}^2$. Tento systém teda nemá periodickú trajektóriu.

Príklad 3.3.17.

Majme systém $x' = y,\ y' = ax + by + cx^2 + dy^2,\ b, d \neq 0$. Zrejme $\operatorname{div}(e^{-2d\,x} f, e^{-2d\,x} g) = e^{-2d\,x} b \neq 0$ na $\mathbb{R}^2$. Tento systém teda nemá periodickú trajektóriu.

Poincaré navyše ukázal, že ak oblasť je jednoducho súvislá a nemá žiadne stacionárne body, potom nemôže obsahovať žiadne uzavreté trajektórie.